შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

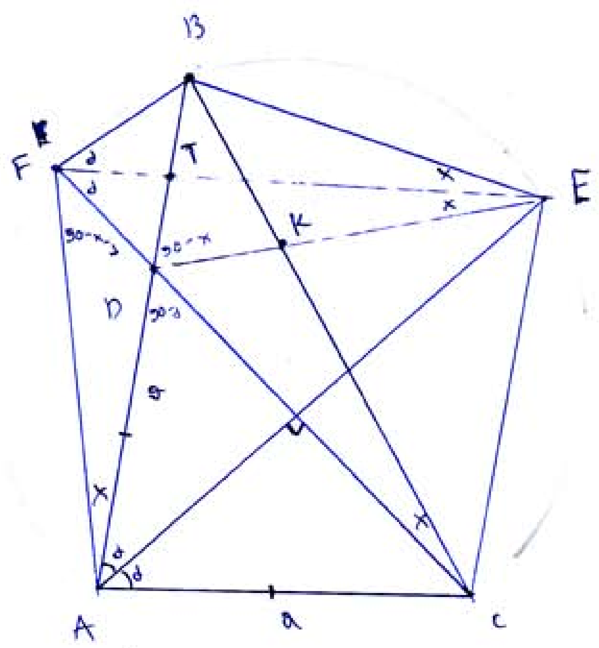
შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №		29.04.2012/ მათ/ IV/ 357

ამოცანა № 4   გვერდი № 1

$\frac{CK}{AC} = ?$



FE-ს და BA-ს გადაკვეთის წერტილი დავარქვათ T.

$\angle BAE = \alpha$; $AC = a$ $\quad \angle FCB = x$

$\angle BFE = \frac{\breve{BE}}{2} = \frac{\breve{EC}}{2} = \alpha \Rightarrow \angle BFE = \angle DFE = \alpha$

$x = \angle FCB = \frac{\breve{FB}}{2} = \angle FAB = \angle FEB$. ვინაიდან ACD სამკუთხედი მართკუთხაა =>

$\Rightarrow \angle ADC = 90 - \alpha = \angle FDT \Rightarrow \angle FTD = 90^\circ$, მივიღეთ, რომ ΔDFB-ში FT არის სიმაღლე და ბისექტრისა => FE არის DB-ს შუამართობი =>

$\Rightarrow \angle DET = x$

მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 357

ამოცანა № 4

გვერდი № 2

$\triangle CAF$-იდან $\angle AFC = 90 - x - \delta$

$\triangle FAD$-ში სინუსების თეორემა:

$$\frac{a}{\cos(x+\delta)} = \frac{FD}{\sin x} \Rightarrow FD = a \cdot \frac{\sin x}{\cos(x+\delta)}$$

$\triangle FDE$-ში სინუსების თეორემით: $\frac{FD}{FE} = \frac{\sin x}{\sin(x+\delta)} \Rightarrow FE = \frac{FD \cdot \sin(x+\delta)}{\sin x}$

$AC = AD$, ხოლო ვ-ბით $AD \cdot DF = DK \cdot EF \Rightarrow$

$$a \cdot \cancel{DF} = DK \cdot \cancel{FD} \cdot \frac{\sin(x+\delta)}{\sin x} \Rightarrow DK = a \cdot \frac{\sin x}{\sin(x+\delta)}$$

$\angle CDE = 180 - \angle BDE - \angle ACD = 180 - (90 - x) - (90 - \delta) = x + \delta$

$\triangle DKC$-ში სინუსების თეორემა:

$$\frac{DK}{KC} = \frac{\sin x}{\sin(x+\delta)} \Rightarrow KC = DK \cdot \frac{\sin(x+\delta)}{\sin x} = a \cdot \frac{\sin x}{\sin(x+\delta)} \cdot \frac{\sin(x+\delta)}{\sin x} =$$

$$= a$$

მივიღეთ, რომ $AC = CK \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{CK}{AC} = 1.$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 357

ამოცანა № 5

გვერდი № 1

უნდა ვაჩვენოთ, რომ $n \geq 2^{m+1}-1$

როგორც ვიცით $2^{m+1} = C_{m+1}^{0} + C_{m+1}^{1} + C_{m+1}^{2} + \dots + C_{m+1}^{m+1}$

ანუ ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ $n \geq C_{m+1}^{1} + C_{m+1}^{2} + \dots + C_{m+1}^{m+1}$

განვიხილოთ პირველი m ჯგუფი, თითოეულ მოქმედება m+1-ე სვეტიდან

m-ივეს მივიღებთ, 2-ონ m+1-მდე ~~...~~ განვიხილოთ თითოეულ მოქმედება

ვ-ილეს პ-ნეს მივიღებთ ამით ი ცხადია, რომ პირველი ასეა ეს ჯგუფი ⇒

⇒ m+2-მ მივიღებთ - [illegible] m+1-მდე ჯგუფის.

$P(x) = (x+d_1)(x+d_2)\cdots(x+d_9)$

დავუშვათ $d_1 > d_2 > d_3 \cdots > d_9$

$P(m) = (m+d_1)(m+d_2)\cdots(m+d_9)$

თუ რომელიმე $m+d_i$-ის სადაც $1 \le i \le 9$-ზე, იყოფა 20-ზე მეტ მარტივ რიცხვზე, მაშინ, ცხადია, რომ $P(m)$-იც გაიყოფა 20-ზე მეტ მარტივ რიცხვზე, თუ არცერთი არ იყოფა p-ზე სადაც $p \geq 20$-ზე, მაშინ $m+d_i$-ს გამყოფები არის $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19$ და მათ ხარისხების შესაბამისი ნამრავლები, ანუ $m+d_i$, მარტივ მამრავლებად, რომ დავშალოთ

$m+d_i = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdots 19^{d_8}$ სადაც $d_1; d_2 \cdots d_8$ არის მთელი არაუარყოფითი

რადგან $m > d_1^8 \Rightarrow m = d_1^8 + 1 + k$; სადაც $k \geq 0$-ზე.

$S_1 = d_1^8 + d_1 + 1 + k = 2^{d_1'} \cdot 3^{d_2'} \cdots 19^{d_8'}$

$S_2 = d_1^8 + d_2 + 1 + k = 2^{d_1''} \cdot 3^{d_2''} \cdots 19^{d_8''}$

$\vdots$

$S_9 = d_1^8 + d_9 + 1 + k = 2^{d_9} \cdots 19^{d_8}$

ვაჩვენოთ, რომ არცერთი 2 არ იყოფა ერთმანეთზე.

ვთქვათ $d_1^8 + d_i + 1 + k$ i $d_1^8 + d_j + 1 + k$, სადაც $\cancel{i > j} \geq 1$ $\quad 1 \le i < i \le 9$

ცხადია, რომ, $d_1^8 + d_i + 1 + k > d_1^8 + d_j + 1 + k$, ამიტომ თუ იყოფიან უნდა აკმაყოფილებდნენ უტოლობას $d_1^8 + d_i + 1 + k \geq 2(d_1^8 + d_j + 1 + k) \Rightarrow$

$\Rightarrow d_i \geq d_1^8 + 2d_j + 1 + k$, რაც ცხადია, არ სრულდება,

რადგან $\cancel{d_i \geq 1}$. $d_1^8 > d_i$

ვაჩვენოთ, რომ ~~მათგან~~ $S_1; S_2 \cdots S_9$-იდან მოიძებნება 2 რომელთა უ.ს.გ > 1-ზე

დავუშვათ ასეთი p არ მოიძებნა, რომ $p \in \mathbb{P}$

$s_i \vdots p$, $s_j \vdots p$, სადაც $2 \le p \le 19$, ცხადია, რომ

ეს არ შეიძლება, რადგან, რადგანაც S არის მარტივი და მათ ~~[illegible]~~ მარტივი გამყოფების რაოდენობაა 8, ხოლო S არის 9 ცალი რადგან დირიხლეს პრინციპით ეს არ მოხდება. ცხადია, რომ ვარჩევთ S ვერ იქნება მარტივი, მარტივი, რომ ყველა მეტი $d_1^8 + d_i + 1 + k \ge 20$, რადგან $d_1 \ge 9$, და

მოვძებნოთ ასეთი p-ს.

ვთქვათ
$$\left.\begin{array}{l} d_1^8 + d_i + 1 + k \vdots p \\ d_1^8 + d_j + 1 + k \vdots p \end{array}\right\} \Rightarrow d_i - d_j \vdots p \Rightarrow d_i \equiv d_j \pmod{p}$$

$a; b \in \mathbb{Z}$ თუ $a > b$ რომელიც ვიცით $P(a) - P(b) \vdots (a-b)$-ზე, სადაც P მთელკოეფიციენტებიანი პოლინომია. $\Rightarrow P(d_i) - P(d_j) \vdots d_i - d_j \vdots p \Rightarrow P(d_i) \equiv P(d_j) \pmod{p}$